

Droites du plan

Leçon

Dans tout le chapitre, le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$.

1. Vecteur directeur d'une droite

Définition

Un **vecteur directeur** d'une droite d est un vecteur non nul $\vec{u}$ dont la direction est celle de d : si A et B sont deux points distincts de d , $\overrightarrow{AB}$ est un vecteur directeur de d .

Remarque. Tout vecteur non nul colinéaire à un vecteur directeur de d est aussi un vecteur directeur de d . Une droite est entièrement déterminée par un point et un vecteur directeur.

2. Équation cartésienne

Propriété

Toute droite d admet une équation de la forme $ax + by + c = 0$ avec $(a; b) \neq (0; 0)$, appelée **équation cartésienne**. Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$ est alors un vecteur directeur de d . Réciproquement, l'ensemble des points $M(x; y)$ tels que $ax + by + c = 0$, avec $(a; b) \neq (0; 0)$, est une droite.

Démonstration (existence d'une équation). Soit d la droite passant par $A(x_A; y_A)$ de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix}$.

$$M(x; y) \in d \iff \overrightarrow{AM} \text{ et } \vec{u} \text{ colinéaires} \iff \det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0 \iff (x - x_A)\beta - (y - y_A)\alpha = 0.$$

En développant : $\beta x - \alpha y + (\alpha y_A - \beta x_A) = 0$, de la forme $ax + by + c = 0$ avec $a = \beta$, $b = -\alpha$ et $c = \alpha y_A - \beta x_A$. On a bien $\vec{u} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b \\ a \end{pmatrix}$. $\square$

Méthode – Déterminer une équation cartésienne

Avec un point A et un vecteur directeur $\vec{u}$: on écrit $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = 0$.

Avec deux points A et B : on prend $\vec{u} = \overrightarrow{AB}$ et on se ramène au cas précédent.

Exemple. Droite passant par $A(2; -1)$ de vecteur directeur $\vec{u} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$: $\det(\overrightarrow{AM}, \vec{u}) = (x - 2) \times 1 - (y + 1) \times 3 = x - 3y - 5$. Équation : $x - 3y - 5 = 0$.

Remarque. Une droite a une infinité d'équations cartésiennes (proportionnelles) : $x - 3y - 5 = 0$ et $2x - 6y - 10 = 0$ décrivent la même droite.

3. Équation réduite, pente

Propriété

- Si d n'est pas parallèle à l'axe des ordonnées, elle a une unique équation de la forme $y = mx + p$, appelée **équation réduite**. m est la **pente** (ou coefficient directeur), p l'**ordonnée à l'origine**.
Le vecteur $\vec{u} \begin{pmatrix} 1 \\ m \end{pmatrix}$ est un vecteur directeur.
- Si d est parallèle à l'axe des ordonnées, elle a une équation de la forme $x = k$.

Propriété

Si $A(x_A; y_A)$ et $B(x_B; y_B)$ sont deux points de d avec $x_A \neq x_B$, la pente de d est $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.

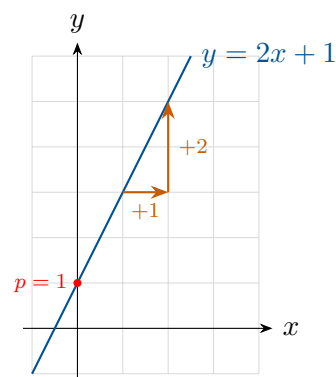
Méthode – Équation réduite à partir de deux points

1. Calculer la pente $m = \frac{y_B - y_A}{x_B - x_A}$.
2. Trouver p en écrivant que A est sur la droite : $y_A = mx_A + p$.

Exemple. $A(1; 3)$, $B(3; 7)$: $m = \frac{7-3}{3-1} = 2$; $3 = 2 \times 1 + p$ donc $p = 1$. Équation réduite : $y = 2x + 1$.

Méthode – Lire graphiquement une équation réduite

- p : ordonnée du point d'intersection avec l'axe des ordonnées.
- m : quand on avance de 1 en abscisse, on monte de m (ou on descend si $m < 0$). Plus généralement $m = \frac{\text{déplacement vertical}}{\text{déplacement horizontal}}$.

**4. Positions relatives de deux droites****Propriété**

- Deux droites sont **parallèles** si et seulement si leurs vecteurs directeurs sont colinéaires.
- Deux droites d'équations réduites $y = mx + p$ et $y = m'x + p'$ sont parallèles si et seulement si $m = m'$.
- Sinon, elles sont **sécantes** en un unique point.

Méthode – Point d'intersection de deux droites sécantes

On cherche le couple $(x; y)$ qui vérifie les deux équations (système de deux équations à deux inconnues). Avec des équations réduites, on résout $mx + p = m'x + p'$ pour trouver x , puis on calcule y .

Exemple. $d_1 : y = 3x - 1$ et $d_2 : y = -x + 7$. $3x - 1 = -x + 7 \iff 4x = 8 \iff x = 2$, puis $y = 3 \times 2 - 1 = 5$. Les droites se coupent en $(2; 5)$.

Exemple d'algorithme : équation réduite passant par deux points.

```
1 def equation_reduite(xA, yA, xB, yB):  
2     if xA == xB:  
3         return "droite verticale x =", xA  
4     m = (yB - yA) / (xB - xA)  
5     p = yA - m * xA  
6     return m, p
```