

Vecteurs

Leçon

1. Vecteurs et translations

Définition

La translation qui transforme A en B est associée au **vecteur** $\overrightarrow{AB}$, caractérisé par :

- sa **direction** (celle de la droite (AB)) ;
- son **sens** (de A vers B) ;
- sa **norme** (la longueur AB), notée $\|\overrightarrow{AB}\|$.

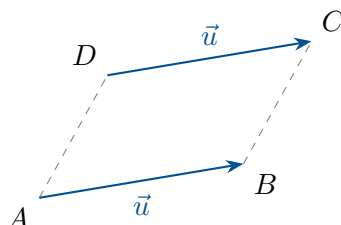
Le vecteur $\overrightarrow{AB}$ est aussi appelé *vecteur déplacement* de A à B . Si O est une origine fixée, $\overrightarrow{OM}$ est le *vecteur position* de M .

Définition

- Deux vecteurs sont **égaux** s'ils ont même direction, même sens et même norme. Tous les vecteurs égaux à $\overrightarrow{AB}$ sont des **représentants** d'un même vecteur, noté par exemple $\vec{u}$.
- Le **vecteur nul**, noté $\vec{0}$, est $\overrightarrow{AA}$ (norme nulle).
- L'**opposé** de $\overrightarrow{AB}$ est $\overrightarrow{BA} = -\overrightarrow{AB}$.

Propriété

$\overrightarrow{AB} = \overrightarrow{DC}$ si et seulement si $ABCD$ est un parallélogramme (éventuellement aplati).



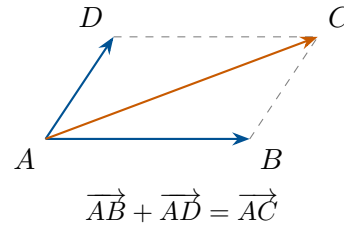
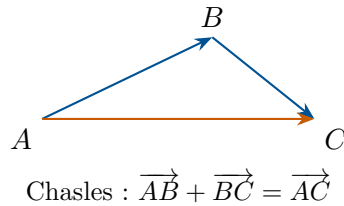
2. Somme de vecteurs

Propriété – Relation de Chasles

Pour tous points A, B, C : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC}$.

Propriété – Règle du parallélogramme

Pour tous points A, B, D : $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC}$ où C est le point tel que $ABCD$ est un parallélogramme.



Remarque. $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BA} = \overrightarrow{AA} = \vec{0}$. Soustraire un vecteur, c'est ajouter son opposé : $\overrightarrow{AB} - \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{CB}$.

3. Produit d'un vecteur par un réel, colinéarité**Définition**

Soit $\vec{u} \neq \vec{0}$ et k un réel non nul. Le vecteur $k\vec{u}$ a :

- la même direction que $\vec{u}$;
- le même sens que $\vec{u}$ si $k > 0$, le sens contraire si $k < 0$;
- pour norme $|k| \times \|\vec{u}\|$.

Par convention, $0\vec{u} = \vec{0}$ et $k\vec{0} = \vec{0}$.

Définition

Deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont **colinéaires** s'il existe un réel k tel que $\vec{v} = k\vec{u}$ (ou $\vec{u} = k\vec{v}$). Le vecteur nul est colinéaire à tout vecteur.

Propriété

- A, B, C sont **alignés** si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{AC}$ sont colinéaires.
- $(AB) \parallel (CD)$ si et seulement si $\overrightarrow{AB}$ et $\overrightarrow{CD}$ sont colinéaires.
- I est le **milieu** de $[AB]$ si et seulement si $\overrightarrow{AI} = \overrightarrow{IB}$, ou encore $\overrightarrow{AI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}$.

Propriété

Si $\vec{u}$ et $\vec{v}$ ne sont pas colinéaires, tout vecteur $\vec{w}$ du plan s'écrit de façon unique $\vec{w} = a\vec{u} + b\vec{v}$ (a, b réels).

4. Coordonnées dans une base orthonormée**Définition**

Le plan est muni d'un repère orthonormé $(O; \vec{i}, \vec{j})$: $\vec{i}$ et $\vec{j}$ sont de norme 1 et de directions perpendiculaires (on dit que $(\vec{i}, \vec{j})$ est une **base orthonormée**). Tout vecteur s'écrit $\vec{u} = x\vec{i} + y\vec{j}$: on note

$\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, coordonnées de $\vec{u}$.

Propriété

Soient $A(x_A; y_A)$, $B(x_B; y_B)$, $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$, $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ et k réel.

— $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} x_B - x_A \\ y_B - y_A \end{pmatrix}$.

— $\vec{u} + \vec{v} \begin{pmatrix} x + x' \\ y + y' \end{pmatrix}$ et $k\vec{u} \begin{pmatrix} kx \\ ky \end{pmatrix}$.

— $\vec{u} = \vec{v} \iff x = x' \text{ et } y = y'$.

— Norme : $\|\vec{u}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$; distance : $AB = \sqrt{(x_B - x_A)^2 + (y_B - y_A)^2}$.

— Milieu I de $[AB]$: $I \left(\frac{x_A + x_B}{2}; \frac{y_A + y_B}{2} \right)$.

Exemple. $A(1; 2)$, $B(4; -2)$: $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, $AB = \sqrt{9 + 16} = 5$, milieu $I \left(\frac{5}{2}; 0 \right)$.

5. Déterminant et colinéarité

Définition

Dans une base orthonormée, le **déterminant** de $\vec{u} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et $\vec{v} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}$ est

$$\det(\vec{u}, \vec{v}) = \begin{vmatrix} x & x' \\ y & y' \end{vmatrix} = xy' - x'y.$$

Propriété

$\vec{u}$ et $\vec{v}$ sont colinéaires $\iff \det(\vec{u}, \vec{v}) = 0 \iff$ leurs coordonnées sont proportionnelles.

Démonstration. Si $\vec{u}$ ou $\vec{v}$ est nul, le déterminant est nul et les vecteurs sont colinéaires. Supposons-les non nuls.

$\Rightarrow$ Si $\vec{v} = k\vec{u}$: $x' = kx$ et $y' = ky$, donc $xy' - x'y = x(ky) - (kx)y = 0$.

$\Leftarrow$ Supposons $xy' = x'y$. Comme $\vec{u} \neq \vec{0}$, $x \neq 0$ ou $y \neq 0$. Si $x \neq 0$, posons $k = \frac{x'}{x}$: $x' = kx$ et $y' = \frac{x'y}{x} = ky$, donc $\vec{v} = k\vec{u}$. Si $y \neq 0$, on pose $k = \frac{y'}{y}$ et on conclut de même. $\square$

Méthode – Alignement, parallélisme

Pour montrer que A, B, C sont alignés : on calcule $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{AC})$ et on vérifie qu'il est nul.

Pour montrer que $(AB) \parallel (CD)$: on vérifie que $\det(\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{CD}) = 0$.

Exemple. $A(-1; -1)$, $B(1; 3)$, $C(4; 9)$: $\overrightarrow{AB} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \end{pmatrix}$, $\overrightarrow{AC} \begin{pmatrix} 5 \\ 10 \end{pmatrix}$, $\det = 2 \times 10 - 5 \times 4 = 0$: alignés.

Exemple d'algorithme : tester l'alignement de trois points.

```
1 def alignes(xA, yA, xB, yB, xC, yC):
2     det = (xB - xA)*(yC - yA) - (xC - xA)*(yB - yA)
3     return det == 0
```

(Avec des nombres décimaux, on teste plutôt `abs(det) < 1e-9` à cause des arrondis.)