

Signe d'une expression et inéquations

Leçon

1. Signe d'une fonction affine

Propriété

Soit $f(x) = mx + p$ avec $m \neq 0$. $f(x) = 0 \iff x = -\frac{p}{m}$, et :

si $m > 0$

x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
$mx + p$	$-$	0	$+$

si $m < 0$

x	$-\infty$	$-\frac{p}{m}$	$+\infty$
$mx + p$	$+$	0	$-$

Moyen mnémotechnique : à droite du zéro, $mx + p$ a le **signe de m** .

Démonstration. Si $m > 0$, f est croissante : pour $x > -\frac{p}{m}$, $f(x) > f(-\frac{p}{m}) = 0$, et pour $x < -\frac{p}{m}$, $f(x) < 0$. Même raisonnement si $m < 0$ (f décroissante). $\square$

Exemple. $-2x + 6$ s'annule en $x = 3$; $m = -2 < 0$: $-2x + 6 > 0$ sur $]-\infty; 3[$ et $-2x + 6 < 0$ sur $]3; +\infty[$.

Remarque. *Signe des fonctions de référence.* Pour tout x : $x^2 \geq 0$, $|x| \geq 0$. Pour $x \geq 0$: $\sqrt{x} \geq 0$. x^3 et $\frac{1}{x}$ ont le signe de x .

2. Équation produit nul, signe d'un produit

Propriété – Équation produit nul

Un produit de facteurs est nul si et seulement si l'un au moins de ses facteurs est nul : $A(x) \times B(x) = 0 \iff A(x) = 0$ ou $B(x) = 0$.

Exemple. $(3x - 1)(x + 4) = 0 \iff 3x - 1 = 0$ ou $x + 4 = 0 \iff x = \frac{1}{3}$ ou $x = -4$.

Méthode – Tableau de signes d'un produit

1. Factoriser l'expression en produit de facteurs du premier degré.
2. Chercher la valeur qui annule chaque facteur ; les ranger dans l'ordre croissant sur la ligne des x .
3. Remplir une ligne par facteur (signe d'une fonction affine), avec un 0 sous la valeur qui l'annule.
4. Dernière ligne : appliquer la **règle des signes** colonne par colonne.

Exemple. Signe de $P(x) = (2x - 4)(-x + 3)$: $2x - 4 = 0 \iff x = 2$; $-x + 3 = 0 \iff x = 3$.

x	$-\infty$	2	3	$+\infty$
$2x - 4$	$-$	0	$+$	$+$
$-x + 3$	$+$	$+$	0	$-$
$P(x)$	$-$	0	$+$	$-$

Ainsi $P(x) > 0 \iff x \in]2; 3[$ et $P(x) \leq 0 \iff x \in]-\infty; 2] \cup [3; +\infty[$.

3. Quotients

Propriété – Équation quotient

$\frac{A(x)}{B(x)} = 0 \iff A(x) = 0$ et $B(x) \neq 0$. Les valeurs qui annulent $B(x)$ sont des **valeurs interdites** (hors de l'ensemble de définition).

Exemple. $\frac{x^2 - 4}{x - 2} = 0$: valeur interdite $x = 2$. $x^2 - 4 = 0 \iff x = 2$ ou $x = -2$. Comme 2 est interdit, $S = \{-2\}$.

Méthode – Tableau de signes d'un quotient

Même méthode que pour un produit (la règle des signes est la même pour la division), mais on place une **double barre** sous chaque valeur interdite dans la dernière ligne.

Exemple. Signe de $Q(x) = \frac{x+1}{x-2}$ (valeur interdite : 2).

x	$-\infty$	-1	2	$+\infty$
$x+1$	$-$	0	$+$	$+$
$x-2$	$-$	$-$	0	$+$
$Q(x)$	$+$	0	$-$	$+$

$Q(x) \geq 0 \iff x \in]-\infty; -1] \cup]2; +\infty[$ (2 est exclu : valeur interdite).

4. Résoudre une inéquation

Méthode

Pour résoudre une inéquation qui n'est pas du premier degré :

1. tout ramener dans un membre : $A(x) < B(x) \iff A(x) - B(x) < 0$;
2. factoriser (ou réduire au même dénominateur) ;
3. dresser le tableau de signes ;
4. lire l'ensemble des solutions (attention aux crochets et aux valeurs interdites).

Exemple. $x^2 < 3x \iff x^2 - 3x < 0 \iff x(x-3) < 0$ sur $]0; 3[$.
Donc $S =]0; 3[$.

Remarque. On ne divise jamais les deux membres par une expression dont on ne connaît pas le signe : diviser $x^2 < 3x$ par x ferait perdre des informations.