

Variations et fonctions de référence

Leçon

1. Sens de variation, extremums

Définition

Soit f une fonction définie sur un intervalle I .

- f est **croissante** sur I si pour tous a, b de I : $a < b \Rightarrow f(a) \leq f(b)$.
 - f est **décroissante** sur I si pour tous a, b de I : $a < b \Rightarrow f(a) \geq f(b)$.
 - f est **monotone** sur I si elle est croissante sur I ou décroissante sur I .
- (On parle de stricte croissance ou décroissance avec des inégalités strictes.)

Remarque. Une fonction croissante conserve l'ordre ; une fonction décroissante l'inverse. Graphiquement, quand on parcourt l'axe des abscisses de gauche à droite, la courbe « monte » ou « descend ».

Définition

Soit f définie sur I et $a \in I$. $f(a)$ est le **maximum** de f sur I si pour tout $x \in I$, $f(x) \leq f(a)$. $f(a)$ est le **minimum** de f sur I si pour tout $x \in I$, $f(x) \geq f(a)$. Un maximum ou un minimum est un **extremum**.

Exemple.

Ce tableau de variations résume : f est croissante sur $[-4; -1]$, décroissante sur $[-1; 2]$ et croissante sur $[2; 5]$. Son maximum est 5 (atteint en -1), son minimum -3 (atteint en 2).

x	-4	-1	2	5
$f(x)$				

Méthode – Comparer des images

Si a et b sont dans un intervalle où f est monotone, on peut comparer $f(a)$ et $f(b)$ grâce au sens de variation. Sinon, on ne peut pas conclure sans information supplémentaire.

2. Fonctions affines

Définition

Une fonction **affine** est définie sur $\mathbb{R}$ par $f(x) = mx + p$. Sa courbe est une **droite**.

— $p = f(0)$ est l'**ordonnée à l'origine**.

— m est le **coefficient directeur** : c'est le **taux d'accroissement** $m = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}$ pour tous $a \neq b$. Quand x augmente de 1, $f(x)$ augmente de m .

Si $p = 0$, f est **linéaire** ; si $m = 0$, f est **constante**.

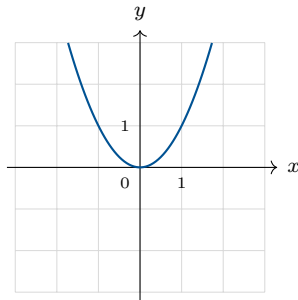
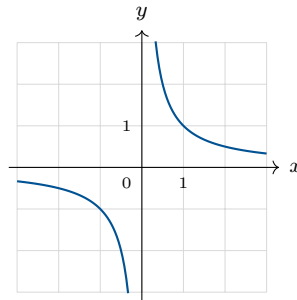
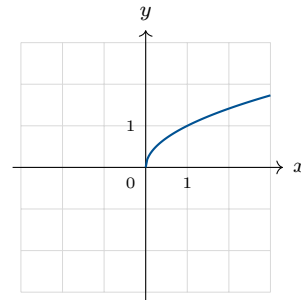
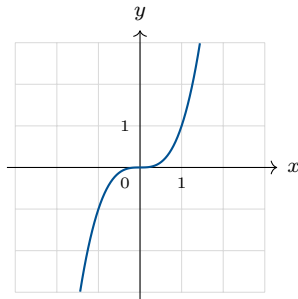
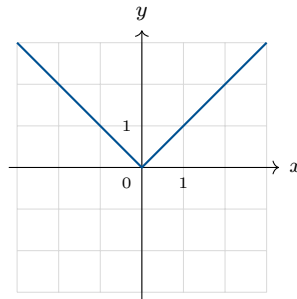
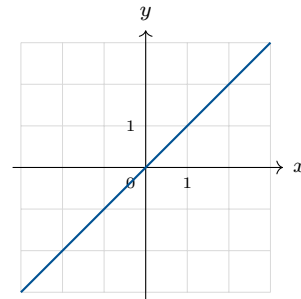
Propriété

Si $m > 0$, f est strictement croissante sur $\mathbb{R}$. Si $m < 0$, f est strictement décroissante. Si $m = 0$, f est constante.

Démonstration. Soient $a < b$. $f(b) - f(a) = (mb + p) - (ma + p) = m(b - a)$ et $b - a > 0$. Donc $f(b) - f(a)$ a le signe de m : si $m > 0$, $f(a) < f(b)$; si $m < 0$, $f(a) > f(b)$. $\square$

Exemple. La fonction affine f telle que $f(-1) = 7$ et $f(3) = -1$ a pour coefficient $m = \frac{-1 - 7}{3 - (-1)} = -2$; puis $f(-1) = 2 + p = 7$ donne $p = 5$: $f(x) = -2x + 5$, décroissante.

3. Les fonctions de référence

Carré : $x \mapsto x^2$ Inverse : $x \mapsto \frac{1}{x}$ Racine carrée : $x \mapsto \sqrt{x}$ Cube : $x \mapsto x^3$ Valeur absolue : $x \mapsto |x|$ Identité : $x \mapsto x$

3.1. Fonction carré

Propriété

La fonction carré $f(x) = x^2$ est définie sur $\mathbb{R}$. Sa courbe est une **parabole**, symétrique par rapport à l'axe des ordonnées. Elle est décroissante sur $]-\infty; 0]$ et croissante sur $[0; +\infty[$. Son minimum est 0, atteint en 0. Pour tout x , $x^2 \geq 0$.

x	$-\infty$	0	$+\infty$
x^2			

Démonstration (croissance sur $[0; +\infty[$). Soient $0 \leq a < b$. $b^2 - a^2 = (b - a)(b + a)$. Or $b - a > 0$ et $b + a > 0$, donc $b^2 - a^2 > 0$: $a^2 < b^2$. (Sur $]-\infty; 0]$, $a < b \leq 0$ donne $b + a < 0$, donc $b^2 - a^2 < 0$: la fonction est décroissante.) $\square$

3.2. Fonction inverse

Propriété

La fonction inverse $f(x) = \frac{1}{x}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Sa courbe est une **hyperbole**. Elle est décroissante sur $] -\infty ; 0[$ et décroissante sur $]0 ; +\infty[$. $\frac{1}{x}$ a le même signe que x .

x	$-\infty$	0	$+\infty$
$\frac{1}{x}$	↘		↘

Démonstration (décroissance sur $]0 ; +\infty[$). Soient $0 < a < b$. $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} = \frac{a-b}{ab}$. Or $a-b < 0$ et $ab > 0$, donc $\frac{1}{b} - \frac{1}{a} < 0 : \frac{1}{b} < \frac{1}{a}$. □

Remarque. Attention : la fonction inverse n'est *pas* décroissante sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$: $-1 < 1$ et $\frac{1}{-1} < \frac{1}{1}$.

3.3. Fonctions racine carrée, cube et valeur absolue**Propriété**

- $x \mapsto \sqrt{x}$ est définie et croissante sur $[0 ; +\infty[$; $\sqrt{x} \geq 0$.
- $x \mapsto x^3$ est définie et croissante sur $\mathbb{R}$; x^3 a le signe de x .
- $x \mapsto |x|$ est définie sur $\mathbb{R}$, décroissante sur $] -\infty ; 0]$, croissante sur $[0 ; +\infty[$; $|x| \geq 0$. Sa courbe est formée de deux demi-droites ($y = -x$ pour $x \leq 0$, $y = x$ pour $x \geq 0$).

4. Position relative des courbes de x , x^2 , x^3 **Propriété**

- Si $0 \leq x \leq 1$: $x^3 \leq x^2 \leq x$.
- Si $x \geq 1$: $x \leq x^2 \leq x^3$.

Démonstration. $x^2 - x = x(x-1)$ et $x^3 - x^2 = x^2(x-1)$. Pour $x \geq 0$, ces deux différences ont le signe de $x-1$: négatives si $x \leq 1$, positives si $x \geq 1$. □

Exemple. $0,5^3 = 0,125 < 0,5^2 = 0,25 < 0,5$ mais $2 < 2^2 = 4 < 2^3 = 8$.

5. Résolutions d'équations et d'inéquations**Méthode – $x^2 = k$, $x^2 < k$**

- $x^2 = k$: si $k > 0$, $S = \{-\sqrt{k}; \sqrt{k}\}$; si $k = 0$, $S = \{0\}$; si $k < 0$, $S = \emptyset$.
 - Pour $k > 0$: $x^2 < k \iff x \in]-\sqrt{k}; \sqrt{k}[$ et $x^2 > k \iff x \in]-\infty; -\sqrt{k}[\cup]\sqrt{k}; +\infty[$.
- On s'aide toujours de la courbe pour ne pas oublier de solution.

Exemple. $x^2 \leq 9 \iff x \in [-3; 3]$. $\frac{1}{x} = 4 \iff x = \frac{1}{4}$. $\sqrt{x} < 2 \iff x \in [0; 4[$.
 $|x| = 5 \iff x = -5$ ou $x = 5$.

Exemple d'algorithme : approcher un maximum par balayage.

```
1 def f(x):  
2     return x * (20 - 2*x)**2  
3  
4 x_max, v_max = 0, f(0)  
5 x = 0  
6 while x <= 10:  
7     if f(x) > v_max:  
8         x_max, v_max = x, f(x)  
9     x = x + 0.01  
10 print(x_max, v_max)
```