

Généralités sur les fonctions

Leçon

1. Notion de fonction

Définition

Soit D un intervalle ou une réunion d'intervalles de $\mathbb{R}$. Définir une **fonction** f sur D , c'est associer à chaque réel x de D un **unique** réel noté $f(x)$.

- D est l'**ensemble de définition** de f .
- $f(x)$ est l'**image** de x par f . On note $f : x \mapsto f(x)$.
- Si $f(a) = b$, on dit que a est un **antécédent** de b par f .

Remarque. Un nombre a toujours *une seule* image, mais peut avoir zéro, un ou plusieurs antécédents. Pour $f(x) = x^2$: l'image de 3 est 9 ; les antécédents de 9 sont 3 et -3 ; -1 n'a pas d'antécédent.

Remarque. Une fonction peut être donnée par une **expression algébrique**, un **tableau de valeurs**, une **courbe** ou un **programme de calcul**. Une fonction définie sur $\mathbb{N}$ (modélisant un phénomène discret) se note souvent $u(n)$.

Méthode – Déterminer l'ensemble de définition

On exclut les valeurs pour lesquelles le calcul est impossible :

- un **dénominateur** ne doit pas être nul ;
- ce qui est sous une **racine carrée** doit être positif ou nul.

Exemple. $f(x) = \frac{1}{x-3}$ est définie sur $\mathbb{R} \setminus \{3\} =]-\infty ; 3[\cup]3 ; +\infty[$.
 $g(x) = \sqrt{x+2}$ est définie pour $x+2 \geq 0$, soit sur $[-2 ; +\infty[$.

2. Courbe représentative

Définition

Le plan est muni d'un repère. La **courbe représentative** $\mathcal{C}_f$ de f est l'ensemble des points $M(x ; y)$ tels que $x \in D$ et $y = f(x)$. On dit que $\mathcal{C}_f$ a pour **équation** $y = f(x)$.

Propriété

Le point $M(a ; b)$ appartient à $\mathcal{C}_f$ si et seulement si $a \in D$ et $f(a) = b$.

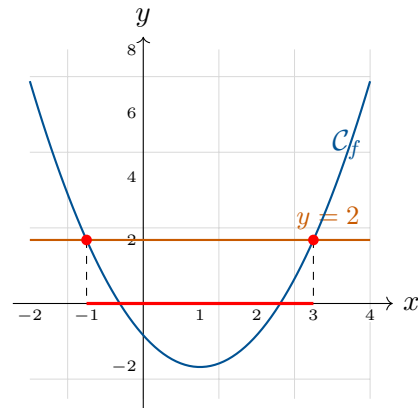
Exemple. $f(x) = x^2 - 3x$. $A(2 ; -2) \in \mathcal{C}_f$ car $f(2) = 4 - 6 = -2$. $B(-1 ; 2) \notin \mathcal{C}_f$ car $f(-1) = 4 \neq 2$.

Méthode – Lire une image, des antécédents

- Image de a : on part de a sur l'axe des **abscisses**, on rejoint la courbe, on lit l'**ordonnée**.
- Antécédents de b : on part de b sur l'axe des **ordonnées**, on trace la droite horizontale $y = b$, on lit les **abscisses** des points d'intersection avec la courbe.

3. Résolution graphique d'équations et d'inéquations**Propriété**

- Les solutions de $f(x) = k$ sont les **abscisses** des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ avec la droite d'équation $y = k$.
- Les solutions de $f(x) < k$ sont les abscisses des points de $\mathcal{C}_f$ situés **strictement en dessous** de cette droite.
- Les solutions de $f(x) = g(x)$ sont les abscisses des points d'intersection de $\mathcal{C}_f$ et $\mathcal{C}_g$.
- Les solutions de $f(x) < g(x)$ sont les abscisses des points où $\mathcal{C}_f$ est strictement en dessous de $\mathcal{C}_g$.



En rouge : solutions de $f(x) \leq 2$, soit $[-1 ; 3]$.

Remarque. Une résolution graphique donne des solutions *approchées* (précision de la lecture). Pour une valeur exacte, on résout algébriquement quand c'est possible, ou on affine avec un logiciel.

Méthode – Résoudre algébriquement $f(x) = g(x)$

On se ramène à $f(x) - g(x) = 0$, on factorise, puis on utilise l'équation produit nul.

Exemple : $x^2 = 2x + 3 \iff x^2 - 2x - 3 = 0 \iff (x - 3)(x + 1) = 0 \iff x = 3$ ou $x = -1$.

4. Modéliser par une fonction**Méthode**

1. Identifier la variable (et l'ensemble de ses valeurs possibles : c'est l'ensemble de définition).
2. Exprimer la grandeur étudiée en fonction de cette variable.
3. Utiliser l'expression, un tableau de valeurs (calculatrice, tableur, Python) ou la courbe pour répondre.

Exemple. Dans une plaque carrée de 20 cm de côté, on découpe aux quatre coins des carrés de côté x pour fabriquer une boîte. Son volume est $V(x) = x(20 - 2x)^2$, pour $x \in [0 ; 10]$.