

Calcul algébrique

Leçon

1. Puissances entières relatives

Définition

Pour a réel et n entier naturel non nul : $a^n = \underbrace{a \times a \times \cdots \times a}_{n \text{ facteurs}}$. Pour $a \neq 0$: $a^0 = 1$ et $a^{-n} = \frac{1}{a^n}$.

Propriété

Pour a, b non nuls et n, p entiers relatifs :

$$a^n \times a^p = a^{n+p} \quad \frac{a^n}{a^p} = a^{n-p} \quad (a^n)^p = a^{np} \quad (ab)^n = a^n b^n \quad \left(\frac{a}{b}\right)^n = \frac{a^n}{b^n}$$

Exemple. $\frac{2^3 \times 2^{-5}}{2^{-4}} = 2^{3-5-(-4)} = 2^2 = 4 \quad (a^3 b^{-2})^2 = a^6 b^{-4}.$

Remarque. $-3^2 = -9$ alors que $(-3)^2 = 9$: la puissance porte uniquement sur ce qui est juste devant elle.

2. Racines carrées

Définition

Pour $a \geq 0$, la **racine carrée** de a , notée $\sqrt{a}$, est l'unique nombre **positif** dont le carré vaut a .

Propriété

- Pour $a \geq 0$: $(\sqrt{a})^2 = a$.
- Pour tout réel a : $\sqrt{a^2} = |a|$.
- Pour $a \geq 0$ et $b \geq 0$: $\sqrt{ab} = \sqrt{a} \times \sqrt{b}$.
- Pour $a \geq 0$ et $b > 0$: $\sqrt{\frac{a}{b}} = \frac{\sqrt{a}}{\sqrt{b}}$.

Démonstration ($\sqrt{ab} = \sqrt{a}\sqrt{b}$). Soient $a \geq 0$ et $b \geq 0$. Le nombre $\sqrt{a} \times \sqrt{b}$ est positif (produit de deux positifs) et $(\sqrt{a} \times \sqrt{b})^2 = (\sqrt{a})^2 \times (\sqrt{b})^2 = ab$. C'est donc le nombre positif dont le carré est ab : $\sqrt{a} \times \sqrt{b} = \sqrt{ab}$. $\square$

Remarque. $\sqrt{(-5)^2} = \sqrt{25} = 5 = |-5|$ et non -5 .
En général $\sqrt{a+b} \neq \sqrt{a} + \sqrt{b}$: $\sqrt{9+16} = 5$ mais $\sqrt{9} + \sqrt{16} = 7$.

Méthode – Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$

On fait apparaître le plus grand carré parfait possible : $\sqrt{50} = \sqrt{25 \times 2} = \sqrt{25} \times \sqrt{2} = 5\sqrt{2}$.

3. Expressions algébriques

Méthode – Choisir la forme adaptée

Une même expression peut s'écrire sous forme développée, factorisée ou autre. On choisit :

- la forme **factorisée** pour résoudre $E = 0$ ou étudier un signe ;
- la forme **développée** pour calculer une image en 0 ou résoudre $E = (\text{terme constant})$;

Exemple. $f(x) = (x-3)^2 - 4 = x^2 - 6x + 5 = (x-1)(x-5)$. Pour résoudre $f(x) = 0$: forme factorisée, $x = 1$ ou $x = 5$. Pour résoudre $f(x) = 5$: forme développée, $x^2 - 6x = 0 \iff x(x-6) = 0 \iff x = 0$ ou $x = 6$.

Méthode – Expressions fractionnaires

On réduit au même dénominateur, en précisant les **valeurs interdites** (qui annulent un dénominateur).

$$\frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} = \frac{x+1}{x(x+1)} + \frac{2x}{x(x+1)} = \frac{3x+1}{x(x+1)} \quad (x \neq 0, x \neq -1).$$

4. Inégalités

Propriété – Opérations sur les inégalités

Soient a, b, c, d des réels.

- Si $a \leq b$, alors $a + c \leq b + c$.
- Si $a \leq b$ et $c \leq d$, alors $a + c \leq b + d$ (somme d'inégalités de même sens).
- Si $a \leq b$ et $k > 0$, alors $ka \leq kb$ (le sens est conservé).
- Si $a \leq b$ et $k < 0$, alors $ka \geq kb$ (le sens est **inversé**).

Remarque. Ce dernier point est lié au sens de variation des fonctions affines (chapitre « Variations ») : $x \mapsto kx$ est croissante si $k > 0$, décroissante si $k < 0$. On ne peut ni soustraire ni multiplier membre à membre deux inégalités.

Exemple. Si $2 \leq x \leq 5$, alors $-10 \leq -2x \leq -4$, puis $-9 \leq 1 - 2x \leq -3$.

Méthode – Comparer deux nombres

- **Par différence** : on étudie le signe de $A - B$. Si $A - B > 0$ alors $A > B$.
- **Par quotient** (pour $A, B > 0$) : on compare $\frac{A}{B}$ à 1. Si $\frac{A}{B} > 1$ alors $A > B$.

Dans un contexte, la différence est une comparaison *additive* (« A dépasse B de... »), le quotient une comparaison *multiplicative* (« A vaut k fois B »).

Exemple. $\frac{2}{3} - \frac{3}{5} = \frac{10-9}{15} = \frac{1}{15} > 0$, donc $\frac{2}{3} > \frac{3}{5}$. $\frac{2^{30}}{4^{14}} = \frac{2^{30}}{2^{28}} = 4 : 2^{30}$ est 4 fois plus grand que 4^{14} .

5. Équations et inéquations du premier degré

Propriété

Soient $a \neq 0$ et b deux réels. L'équation $ax + b = 0$ a une unique solution : $x = -\frac{b}{a}$.

Propriété

Soient $a \neq 0$ et b deux réels. L'inéquation $ax + b > 0$ équivaut à $ax > -b$:

- si $a > 0$: $x > -\frac{b}{a}$, ensemble des solutions $S =]-\frac{b}{a}; +\infty[$;
- si $a < 0$: $x < -\frac{b}{a}$, ensemble des solutions $S =]-\infty; -\frac{b}{a}[$.

Exemple. $-3x + 6 \geq 0 \iff -3x \geq -6 \iff x \leq 2$ (on divise par $-3 < 0$, le sens change).
 $S =]-\infty; 2]$.

Méthode – Isoler une variable dans une formule

On applique les mêmes règles qu'aux équations, en considérant les autres lettres comme des nombres.

$$d = vt \iff t = \frac{d}{v} \quad U = RI \iff R = \frac{U}{I} \quad V = \pi r^2 h \iff h = \frac{V}{\pi r^2} \quad S = \pi r^2 \iff r = \sqrt{\frac{S}{\pi}} \quad (r > 0).$$

Méthode – Modéliser par une inéquation

1. Choisir l'inconnue (et son unité).
2. Traduire l'énoncé par une inéquation.
3. Résoudre.
4. Interpréter la solution dans le contexte (entier ? positif?).

Exemple d'algorithme : première puissance dépassant une valeur. Au bout de combien d'années un capital placé à 5 % par an double-t-il ? On cherche le plus petit n tel que $1,05^n > 2$.

```

1  n = 0
2  while 1.05**n <= 2:
3      n = n + 1
4  print(n)      # affiche 15

```