

Calcul algébrique

Exercices – Sujet

Exercice 1 ★ Puissances

Simplifier (a et b sont des réels non nuls).

$$A = \frac{2^3 \times 2^{-5}}{2^{-4}} \quad B = (3^2)^{-1} \times 3^4 \quad C = \frac{5^{-2} \times 25^2}{5} \quad D = (a^3 b^{-2})^2 \times a^{-4} b^5$$

Exercice 2 ★ Racines carrées

1. Calculer $\sqrt{(-3)^2}$, puis $\sqrt{x^2}$ pour $x = -5$.
2. Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ avec b entier le plus petit possible : $\sqrt{18}$; $\sqrt{200}$; $\sqrt{45}$.
3. Calculer : $\sqrt{3} \times \sqrt{12}$; $\sqrt{\frac{16}{9}}$; $2\sqrt{5} \times 3\sqrt{5}$.

Exercice 3 ★★

Écrire sous la forme $a\sqrt{b}$ ou $a + b\sqrt{c}$.

$$A = \sqrt{50} - 3\sqrt{2} + \sqrt{8} \quad B = 2\sqrt{27} - \sqrt{75} + \sqrt{12} \quad C = (\sqrt{3} + 1)^2 \quad D = (2\sqrt{5} - 3)(2\sqrt{5} + 3)$$

Exercice 4 ★★ Forme adaptée

Soit $f(x) = (x - 3)^2 - 4$.

1. Développer $f(x)$, puis montrer que $f(x) = (x - 1)(x - 5)$.
2. En choisissant la forme la plus adaptée : calculer $f(0)$ et $f(3)$; résoudre $f(x) = 0$, $f(x) = 5$ et $f(x) = -4$.

Exercice 5 ★★ Expressions fractionnaires

Préciser les valeurs interdites, puis écrire sous la forme d'un seul quotient.

$$A = \frac{1}{x} + \frac{2}{x+1} \quad B = 3 - \frac{2}{x-1} \quad C = \frac{x}{x+2} - 1 \quad D = \frac{1}{x-2} - \frac{1}{x+2}$$

Exercice 6 ★★ Inégalités

1. On sait que $2 \leq x \leq 5$. Encadrer : $x + 3$; $4x$; $-2x$; $1 - 3x$.
2. On sait de plus que $-1 \leq y \leq 3$. Encadrer $x + y$.
3. *Plus difficile.* Encadrer $x - y$ (on pourra d'abord encadrer $-y$).

Exercice 7 ★★ Comparer

1. Comparer $\frac{2}{3}$ et $\frac{3}{5}$ en étudiant leur différence.
2. Comparer 2^{30} et 4^{14} en étudiant leur quotient.
3. Pour x réel, comparer $(x+1)^2$ et x^2+1 .
4. Une population passe de $A = 1\,200$ à $B = 1\,500$ habitants. Exprimer l'évolution de manière additive, puis multiplicative.

Exercice 8 ★ Équations et inéquations

Résoudre (donner l'ensemble des solutions).

a) $5x - 3 = 2x + 9$

d) $\frac{x-1}{2} > \frac{2x+1}{3}$

b) $3(x-2) = 5 - (x+1)$

e) $x^2 = 7$

c) $2x - 7 \leq 5x + 2$

f) $x^2 = -4$

Exercice 9 ★★ Formules des autres disciplines

1. Exprimer : I en fonction de U et R dans $U = RI$; v en fonction de d et t dans $d = vt$; h en fonction de V et r dans $V = \pi r^2 h$; L en fonction de P et ℓ dans $P = 2(L + \ell)$.
2. La conversion des degrés Celsius en degrés Fahrenheit est donnée par $F = \frac{9}{5}C + 32$. Exprimer C en fonction de F , puis convertir 77°F en degrés Celsius.
3. Un disque a une aire $S = 50\text{ cm}^2$. Calculer son rayon (arrondi au mm).

Exercice 10 ★★ Modélisation

Une agence loue des voitures selon deux formules : formule A : 50 € de forfait plus 0,20 € par km ; formule B : 0,45 € par km, sans forfait. Pour quelles distances la formule A est-elle strictement plus avantageuse ?

Exercice 11 ★★★

1. Développer $(a+b+c)^2$ en écrivant $(a+b+c)^2 = ((a+b)+c)^2$.
2. En déduire le développement de $(x+y+1)^2$.
3. Écrire sans racine au dénominateur : $\frac{6}{\sqrt{3}}$ et $\frac{1}{\sqrt{2}-1}$ (pour la seconde, multiplier numérateur et dénominateur par $\sqrt{2}+1$).

Exercice 12 ★★ Python

Un capital de 1 000 € est placé à 3 % par an (intérêts composés).

1. Justifier que le capital après n années est $1\,000 \times 1,03^n$.
2. Compléter le programme pour qu'il affiche le nombre d'années nécessaires pour que le capital dépasse 1 500 €.

```
1 n = 0
2 capital = 1000
3 while ..... :
4     capital = .....
5     n = n + 1
6 print(n)
```