

Arithmétique

Leçon

1. Multiples et diviseurs

Définition

Soient a et b deux entiers relatifs ($a, b \in \mathbb{Z}$). On dit que a est un **multiple** de b s'il existe un entier k tel que $a = kb$. On dit alors aussi que b est un **diviseur** de a , ou que b **divise** a (lorsque $b \neq 0$).

Exemple. $91 = 7 \times 13$: 91 est un multiple de 7 et 7 est un diviseur de 91.
 $0 = 0 \times b$: 0 est un multiple de tout entier. $a = a \times 1$: 1 divise tout entier.

Méthode – Lister les diviseurs d'un entier

On teste les divisions par 1, 2, 3, ... en écrivant les diviseurs par paires. Pour $36 : 1 \times 36, 2 \times 18, 3 \times 12, 4 \times 9, 6 \times 6$. Les diviseurs positifs de 36 sont 1 ; 2 ; 3 ; 4 ; 6 ; 9 ; 12 ; 18 ; 36.

Propriété – Critères de divisibilité (rappels)

Un entier est divisible :

- par 2 si son chiffre des unités est 0, 2, 4, 6 ou 8 ;
- par 5 si son chiffre des unités est 0 ou 5 ; par 10 s'il se termine par 0 ;
- par 3 (resp. 9) si la somme de ses chiffres est divisible par 3 (resp. 9).

Propriété

Si b et c sont deux multiples de a , alors $b + c$ est un multiple de a .

Démonstration. b et c sont des multiples de a : il existe deux entiers k et k' tels que $b = ka$ et $c = k'a$. Alors $b + c = ka + k'a = (k + k')a$. Comme $k + k'$ est un entier, $b + c$ est un multiple de a . $\square$

2. Nombres pairs et impairs

Définition

Un entier n est **pair** s'il est multiple de 2 : il existe un entier k tel que $n = 2k$.
 Un entier n est **impair** s'il n'est pas pair : il existe un entier k tel que $n = 2k + 1$.

Propriété

Le carré d'un nombre impair est impair.

Démonstration. Soit n un entier impair : $n = 2k + 1$ avec k entier. $n^2 = (2k + 1)^2 = 4k^2 + 4k + 1 = 2(2k^2 + 2k) + 1$. Comme $2k^2 + 2k$ est un entier, n^2 est impair. $\square$

Remarque. Par contraposée : si n^2 est pair, alors n est pair. Ce résultat sert à démontrer que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Méthode – Démontrer une propriété sur les entiers

On traduit l'énoncé avec des lettres : un nombre pair s'écrit $2k$, un nombre impair $2k + 1$, deux entiers consécutifs n et $n + 1$, un multiple de 3 s'écrit $3k$... Puis on calcule et on factorise pour faire apparaître la forme voulue.

Exemple. La somme de trois entiers consécutifs est un multiple de 3 : $n + (n + 1) + (n + 2) = 3n + 3 = 3(n + 1)$.

3. Nombres premiers et fractions irréductibles

Définition

Un entier naturel est **premier** s'il admet exactement deux diviseurs positifs : 1 et lui-même. Les premiers nombres premiers sont 2 ; 3 ; 5 ; 7 ; 11 ; 13 ; 17 ; 19 ; 23 ; ...

Propriété – Décomposition en facteurs premiers (rappel)

Tout entier supérieur ou égal à 2 s'écrit comme un produit de nombres premiers. Par exemple $360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$.

Définition

Une fraction $\frac{a}{b}$ est **irréductible** lorsque le seul diviseur positif commun à a et b est 1.

Méthode – Rendre une fraction irréductible

On décompose numérateur et dénominateur en produits de facteurs premiers et on simplifie par les facteurs communs.

$$\frac{84}{126} = \frac{2^2 \times 3 \times 7}{2 \times 3^2 \times 7} = \frac{2}{3}.$$

On peut aussi simplifier directement par le plus grand diviseur commun (ici 42).

4. Algorithmes

Exemple d'algorithme : tester si a est un multiple de b . En Python, $a \% b$ donne le reste de la division euclidienne de a par b .

```
1 def est_multiple(a, b):
2     return a % b == 0
```

Exemple d'algorithme : plus grand multiple de a inférieur ou égal à b .

```
1 def plus_grand_multiple(a, b):
2     m = 0
3     while m + a <= b:
4         m = m + a
5     return m
```

`plus_grand_multiple(7, 50)` renvoie 49.