

Nombres réels

Leçon

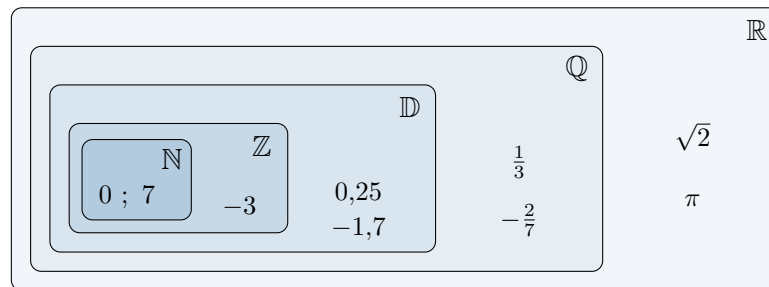
1. Les ensembles de nombres

Définition

- $\mathbb{N}$: ensemble des **entiers naturels** : $0 ; 1 ; 2 ; 3 ; \dots$
- $\mathbb{Z}$: ensemble des **entiers relatifs** : $\dots ; -2 ; -1 ; 0 ; 1 ; 2 ; \dots$
- $\mathbb{D}$: ensemble des **nombres décimaux**, qui s'écrivent $\frac{a}{10^n}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$ (un nombre fini de chiffres après la virgule).
- $\mathbb{Q}$: ensemble des **nombres rationnels**, qui s'écrivent $\frac{a}{b}$ avec $a \in \mathbb{Z}$ et $b \in \mathbb{N}$, $b \neq 0$.
- $\mathbb{R}$: ensemble des **nombres réels** : ce sont les abscisses de tous les points d'une droite graduée.

Propriété

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{D} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$



Définition

Un nombre réel qui n'est pas rationnel est dit **irrationnel**. Exemples : $\sqrt{2}$, $\sqrt{3}$, π .

Démonstration ($\frac{1}{3}$ n'est pas décimal). Supposons par l'absurde que $\frac{1}{3}$ est décimal : $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^n}$ avec a entier. Alors $10^n = 3a$, donc 10^n est un multiple de 3. Or la somme des chiffres de $10^n = 100\dots 0$ vaut 1, qui n'est pas un multiple de 3 : 10^n n'est pas divisible par 3. C'est absurde, donc $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal. $\square$

Démonstration ($\sqrt{2}$ est irrationnel). Supposons par l'absurde que $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec $\frac{p}{q}$ fraction **irréductible** (p, q entiers naturels, $q \neq 0$). Alors $2 = \frac{p^2}{q^2}$, soit $p^2 = 2q^2$: p^2 est pair, donc p est pair (voir chapitre « Ensembles et logique »). On écrit $p = 2k$: $4k^2 = 2q^2$, donc $q^2 = 2k^2$: q^2 est pair, donc q est pair. p et q sont tous les deux pairs : la fraction $\frac{p}{q}$ se simplifie par 2, ce qui contredit son irréductibilité. Donc $\sqrt{2}$ est irrationnel. $\square$

Un peu d'histoire

La découverte des irrationnels (vers le v^e siècle av. J.-C., chez les pythagoriciens) a provoqué une crise : la diagonale d'un carré de côté 1 ne peut pas s'exprimer comme un quotient d'entiers.

Remarque. Une calculatrice ne manipule que des valeurs approchées (décimales) : l'affichage 1,414213562 n'est pas $\sqrt{2}$.

2. Intervalles de $\mathbb{R}$

Définition

Soient a et b deux réels avec $a < b$. Un **intervalle** est l'ensemble des réels x vérifiant une ou deux inégalités :

Inégalité	Notation	Représentation	Se lit
$a \leq x \leq b$	$[a; b]$		intervalle fermé a, b
$a < x < b$	$]a; b[$		intervalle ouvert a, b
$a \leq x < b$	$[a; b[$		fermé en a , ouvert en b
$x \geq a$	$[a; +\infty[$		a , plus l'infini
$x < b$	$] -\infty; b[$		moins l'infini, b

Remarque. Du côté de $+\infty$ ou $-\infty$, le crochet est toujours **ouvert**. On a $\mathbb{R} =]-\infty; +\infty[$. Le crochet tourné vers l'intérieur signifie que la borne est *incluse*.

| **Exemple.** $x \in [-2; 3[\iff -2 \leq x < 3$. Ainsi $-2 \in [-2; 3[$ mais $3 \notin [-2; 3[$.

Méthode – Intersection et réunion d'intervalles

On représente les deux intervalles sur une même droite graduée (avec deux couleurs).

- L'**intersection** $I \cap J$ correspond à la partie coloriée deux fois.
- La **réunion** $I \cup J$ correspond à la partie coloriée au moins une fois.

| **Exemple.** $I = [-1; 4]$ et $J =]2; +\infty[$: $I \cap J =]2; 4]$ et $I \cup J = [-1; +\infty[$.

3. Valeur absolue et distance

Définition

La **valeur absolue** d'un réel a , notée $|a|$, est la distance entre a et 0 sur la droite graduée. $|a| = a$ si $a \geq 0$ et $|a| = -a$ si $a < 0$.

| **Exemple.** $|5| = 5$, $|-3| = 3$, $|0| = 0$, $|1 - \sqrt{2}| = \sqrt{2} - 1$ (car $1 - \sqrt{2} < 0$).

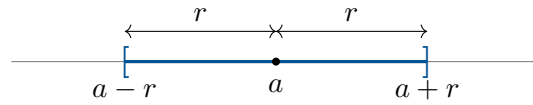
Propriété – Distance entre deux réels

La distance entre deux réels a et b est $|b - a| = |a - b|$.

| **Exemple.** La distance entre -2 et 5 est $|5 - (-2)| = 7$.

Propriété

Soient a un réel et r un réel positif. $|x - a| \leq r \iff a - r \leq x \leq a + r \iff x \in [a - r; a + r]$.



Exemple. $|x - 3| \leq 2$ signifie que la distance entre x et 3 est au plus 2 : $x \in [1; 5]$.

Réciproquement, $[-4; 2]$ a pour centre $\frac{-4+2}{2} = -1$ et pour rayon 3 : $x \in [-4; 2] \iff |x + 1| \leq 3$.

4. Encadrements et arrondis**Définition**

Encadrer un réel x à 10^{-n} près, c'est trouver deux décimaux a et b tels que $a \leq x \leq b$ et $b - a = 10^{-n}$ (l'**amplitude** de l'encadrement).

Exemple. $1,41 \leq \sqrt{2} \leq 1,42$ est un encadrement de $\sqrt{2}$ à 10^{-2} près, car $1,41^2 = 1,9881 < 2$ et $1,42^2 = 2,0164 > 2$.

Méthode – Arrondir avec des chiffres significatifs

Les chiffres significatifs d'un nombre sont tous ses chiffres à partir du premier chiffre non nul (en partant de la gauche). Dans un problème, on donne un résultat avec autant de chiffres significatifs que les données les moins précises.

Exemple : 0,004567 arrondi à 2 chiffres significatifs est 0,0046.

Exemple d'algorithme : encadrer $\sqrt{2}$ par balayage. On part de $x = 1$ et on augmente x de 0,01 tant que $x^2 < 2$:

```

1  x = 1
2  while x**2 < 2:
3      x = x + 0.01
4  print(x - 0.01, "<= racine de 2 <=", x)
```