

Ensembles et logique

Leçon

Remarque. Cette partie est transversale : ces notions se travaillent *en situation* dans tous les chapitres. Cette leçon sert de référence à laquelle revenir toute l'année.

1. Vocabulaire des ensembles

Définition

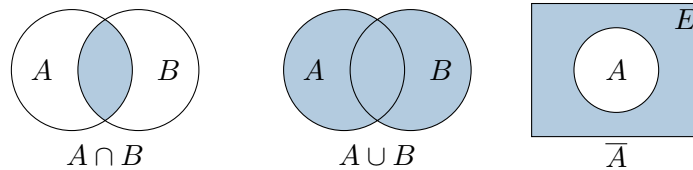
Un **ensemble** est une collection d'objets appelés **éléments**.

- $x \in E$ se lit « x appartient à E » ; $x \notin E$: « x n'appartient pas à E ».
- On note $\{\dots\}$ un ensemble défini par la liste de ses éléments : $E = \{1; 2; 3\}$.
- L'**ensemble vide**, noté $\emptyset$, ne contient aucun élément.
- A est **inclus** dans E (ou est un **sous-ensemble** de E), noté $A \subset E$, si tout élément de A est un élément de E .
- Le **cardinal** d'un ensemble fini A , noté $\text{Card}(A)$, est son nombre d'éléments.

Définition – Opérations sur les ensembles

Soient A et B deux sous-ensembles d'un ensemble E .

- L'**intersection** $A \cap B$ (« A inter B ») est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **et** à B .
- La **réunion** $A \cup B$ (« A union B ») est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A **ou** à B (éventuellement aux deux).
- Le **complémentaire** de A dans E , noté $\bar{A}$ ou $E \setminus A$, est l'ensemble des éléments de E qui n'appartiennent pas à A .



Exemple. $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6\}$, $A = \{2; 4; 6\}$ et $B = \{1; 2; 3\}$. $A \cap B = \{2\}$, $A \cup B = \{1; 2; 3; 4; 6\}$, $\bar{A} = \{1; 3; 5\}$, $\text{Card}(A \cup B) = 5$.

Définition – Couples et produit cartésien

Un **couple** $(a; b)$ est une liste ordonnée de deux éléments : $(1; 2) \neq (2; 1)$. Le **produit cartésien** $E \times F$ est l'ensemble des couples $(x; y)$ avec $x \in E$ et $y \in F$.

Exemple. Si $E = \{P; F\}$ (pile ou face) et $F = \{1; 2\}$, alors $E \times F = \{(P; 1); (P; 2); (F; 1); (F; 2)\}$. Les coordonnées $(x; y)$ d'un point du plan sont un élément de $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$.

2. Propositions et connecteurs

Définition

Une **proposition** est un énoncé mathématique qui est soit vrai, soit faux. Il peut contenir une variable : « $x > 2$ » est vraie pour $x = 5$, fausse pour $x = 1$.

Définition – Connecteurs « et », « ou », négation

Soient P et Q deux propositions.

- « P **et** Q » est vraie lorsque P et Q sont vraies toutes les deux.
- « P **ou** Q » est vraie lorsqu'au moins l'une des deux est vraie (le « ou » mathématique est *inclusif*).
- La **négation** de P , notée « non P », est vraie lorsque P est fausse.

Propriété – Négation de « et », « ou »

La négation de « P et Q » est « (non P) ou (non Q) ».

La négation de « P ou Q » est « (non P) et (non Q) ».

Exemple. La négation de « $x \geq 2$ et $x < 5$ » est « $x < 2$ ou $x \geq 5$ ». La négation de « n est pair » est « n est impair ». La négation de « $x > 3$ » est « $x \leq 3$ » (et non « $x < 3$ »).

Remarque. Lien avec les ensembles : « et » correspond à l'intersection, « ou » à la réunion, « non » au complémentaire.

Définition – Quantificateurs

« **Pour tout** $x \dots$ » (quantification universelle) : la propriété est vraie pour toutes les valeurs de x .

« **Il existe** $x \dots$ » (quantification existentielle) : la propriété est vraie pour au moins une valeur de x .

3. Implication, réciproque, contraposée**Définition**

- L'**implication** « $P \Rightarrow Q$ » se lit « si P , alors Q ». Elle signifie que lorsque P est vraie, Q est vraie.
- Sa **réciproque** est « $Q \Rightarrow P$ ».
- Sa **contraposée** est « non $Q \Rightarrow$ non P ».
- On dit que P et Q sont **équivalentes**, et on note $P \iff Q$, si $P \Rightarrow Q$ et $Q \Rightarrow P$ sont vraies (« P si et seulement si Q »).

Propriété

Une implication et sa contraposée sont **toujours** vraies ou fausses en même temps. En revanche, la réciproque d'une implication vraie peut être fausse.

Exemple. « Si $x = 3$, alors $x^2 = 9$ » est vraie. Sa réciproque « si $x^2 = 9$, alors $x = 3$ » est fausse ($x = -3$). Sa contraposée « si $x^2 \neq 9$, alors $x \neq 3$ » est vraie.

Remarque. Le théorème de Pythagore et sa réciproque (vus au collège) sont deux implications différentes, toutes deux vraies : on peut donc écrire une équivalence.

4. Types de raisonnement

Méthode – Contre-exemple

Pour montrer qu'une proposition « pour tout x , ... » est **fausse**, il suffit de trouver **une seule** valeur de x pour laquelle elle est fausse.

| **Exemple.** « Pour tout réel x , $x^2 \geq x$ » est fausse : pour $x = 0,5$, $x^2 = 0,25 < 0,5$.

Méthode – Disjonction des cas

On découpe le problème en plusieurs cas qui recouvrent toutes les possibilités, et on démontre le résultat dans chaque cas.

| **Démonstration (exemple).** Montrons que pour tout entier n , $n(n+1)$ est pair. *Cas 1* : n est pair. Alors $n = 2k$ et $n(n+1) = 2(k(n+1))$ est pair. *Cas 2* : n est impair. Alors $n+1$ est pair, $n+1 = 2k$ et $n(n+1) = 2(nk)$ est pair. Dans tous les cas, $n(n+1)$ est pair. $\square$

Méthode – Raisonnement par l'absurde

On suppose que la proposition à démontrer est fausse, et on aboutit à une contradiction (une absurdité). La proposition est donc vraie.

| **Démonstration (exemple).** Montrons qu'il n'existe pas de plus grand entier naturel. Supposons par l'absurde qu'il existe un plus grand entier naturel N . Alors $N+1$ est un entier naturel et $N+1 > N$: c'est contradictoire avec le fait que N est le plus grand. Donc il n'existe pas de plus grand entier naturel. $\square$

Méthode – Raisonnement par contraposée

Pour démontrer $P \Rightarrow Q$, il est parfois plus simple de démontrer « non $Q \Rightarrow$ non P ».