

Ensembles et logique

Exercices – Sujet

Exercice 1 ★

On considère $E = \{1; 2; 3; 4; 5; 6; 7; 8; 9; 10\}$, A l'ensemble des nombres pairs de E et B l'ensemble des multiples de 3 de E .

1. Écrire A et B en extension (liste des éléments).
2. Déterminer $A \cap B$, $A \cup B$ et $\overline{A}$.
3. Calculer $\text{Card}(A)$, $\text{Card}(B)$, $\text{Card}(A \cap B)$ et $\text{Card}(A \cup B)$. Que remarque-t-on ?

Exercice 2 ★

Recopier en complétant par $\in$, $\notin$, $\subset$ ou $\not\subset$.

- | | | |
|---------------------------------|------------------------------|----------------------------------|
| a) $3 \dots \{1; 3; 5\}$ | c) $2 \dots \{1; 3; 5\}$ | e) $\emptyset \dots \{1; 3; 5\}$ |
| b) $\{1; 3\} \dots \{1; 3; 5\}$ | d) $\{2\} \dots \{1; 3; 5\}$ | f) $\{5; 1\} \dots \{1; 3; 5\}$ |

Exercice 3 ★

On lance une pièce (Pile ou Face) puis un dé tétraédrique (faces 1, 2, 3, 4).

1. Écrire l'ensemble $\{P; F\} \times \{1; 2; 3; 4\}$ des issues possibles. Combien y en a-t-il ?
2. Écrire l'ensemble des issues pour lesquelles on obtient Pile et un nombre pair.

Exercice 4 ★★

Écrire la négation de chacune des propositions suivantes.

- a) $x > 3$
- b) n est un nombre pair.
- c) Il pleut et il fait froid.
- d) n est pair ou n est un multiple de 5.
- e) $-1 \leq x < 4$ (c'est-à-dire $x \geq -1$ et $x < 4$).

Exercice 5 ★★

Les propositions suivantes sont fausses. Le prouver à l'aide d'un contre-exemple.

- a) Pour tout réel x , $(x + 1)^2 = x^2 + 1$.
- b) La somme de deux nombres impairs est impaire.
- c) Pour tout réel x , $x^2 \geq x$.
- d) Un quadrilatère dont les diagonales ont la même longueur est un rectangle.

Exercice 6 ★★

Pour chaque implication : dire si elle est vraie, puis énoncer sa réciproque et sa contraposée et dire si elles sont vraies.

1. Si un entier est un multiple de 6, alors c'est un multiple de 3.
2. Si $x = 2$, alors $x^2 = 4$.
3. Si $ABCD$ est un carré, alors ses diagonales sont perpendiculaires.

Exercice 7 ★★

Compléter par $\Rightarrow$, $\Leftarrow$ ou $\iff$ (le symbole le plus précis possible).

- a) $x = 3 \quad \dots \quad x^2 = 9$
- b) $2x + 1 = 7 \quad \dots \quad x = 3$
- c) $x > 2 \quad \dots \quad x > 5$
- d) $ABCD$ est un carré $\dots$ $ABCD$ est un rectangle
- e) $xy = 0 \quad \dots \quad x = 0$ ou $y = 0$

Exercice 8 ★★

1. Montrer, par disjonction des cas, que pour tout entier n , le nombre $n^2 + n$ est pair.
2. En déduire que pour tout entier n , $n^2 + n + 1$ est impair.

Exercice 9 ★★★

1. Démontrer que le carré d'un nombre impair est impair.
2. En raisonnant par contraposée, en déduire que : si n^2 est pair, alors n est pair.

Exercice 10 ★★★

On cherche un rectangle de périmètre 20 cm et d'aire 30 cm². On note x sa largeur.

1. Montrer que x doit vérifier $x(10 - x) = 30$, c'est-à-dire $x^2 - 10x + 30 = 0$.
2. Vérifier que $x^2 - 10x + 30 = (x - 5)^2 + 5$.
3. Démontrer par l'absurde qu'un tel rectangle n'existe pas.